Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória
VRP – aula 9

SIMO/MQDEE

MARIA CÂNDIDA MOURÃO

(cmourao@iseg.utl.pt)

VRPTW – CO

TIME WINDOWS

- Dados:
  - Cada cliente $i \in N$ deve ser visitado no intervalo de tempo $[a_i, b_i]$
  - Depósito representado pelos nodos 0 e $n+1$
  - s_i tempo necessário para servir o cliente $i \in N$ $(s_0 = s_{n+1} = 0)$
  - t_{ij} tempo de viagem de $i \in V$ para $j \in V$

- Variáveis:
  - $x_{ij}^k = \begin{cases} 1 & \text{se o veículo } k \text{ viaja de } i \in V \text{ para } j \in V \\ 0 & \text{c. c.} \end{cases}$
  - T_i^k - instante de início de serviço a $i \in N$ pelo veículo $k \in K$

$\boxed{|K|n(n+2) \text{ restrições}}$

VRPTW – Modelos - CO

$$(\text{VRPTW}) \quad \min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}\, x_{ij}^k$$ Minimização do custo total

s. a:

$$\sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in \delta^-(i)} x_{ji}^k = 0 \quad \forall i \in N; \forall k \in K$$ cada k, entra e sai de i = nº de vezes

$$\sum_{j \in \delta^+(0)} x_{0j}^k = 1 \quad \forall k \in K$$ cada k, sai 1 vez do depósito

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k = 1 \quad \forall i \in N$$ cada i é visitado por um só k

$$\sum_{j \in \delta^-(n+1)} x_{j,n+1}^k = 1 \quad \forall k \in K$$ cada k, regressa ao depósito

$$\sum_{i \in N} q_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \le Q \quad \forall k \in K$$ capacidade

$$T_i^k + s_i + t_{ij} - T_j^k + M_{ij} x_{ij}^k \le M_{ij} \quad \forall (i,j) \in A; \forall k \in K$$ TW & eliminação de subcircuitos

$$a_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \le T_i^k \le b_i \sum_{j \in \delta^+(i)} x_{ij}^k \quad \forall i \in N; \forall k \in K$$ TW

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A; \forall k \in K$$

$\boxed{|K|(2n^2 + 3n + 3) \text{ restrições}}$

VRPTW – CO – exemplo 6

Considere a matriz de tempos seguinte relativa a um problema de roteamento nos nodos

	Dep	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Dep	-	10	8	7	6	4	5	6
C1	8	-	4	2	5	3	2	5
C2	10	4	-	5	2	3	4	1
C3	6	3	4	-	2	5	6	4
C4	5	4	3	3	-	5	6	2
C5	6	3	1	6	4	-	8	2
C6	7	2	5	5	7	5	-	3
C7	8	5	2	4	3	6	5	-

Em que dispõe de veículos com 130 de capacidade e as TW e as procuras dos clientes são:

	C1	C2	C3	C4	C5	C6	C7
Procuras	45	50	30	20	25	35	30
TW	[2, 15]	[8, 20]	[10, 30]	[2, 15]	[10, 30]	[10, 30]	[15, 40]
Tempos serviço	2	4	2	3	4	2	3

Utilize o Solver para resolver o problema com o modelo apropriado.

VRP – SOLVER

- Excel Add-in
- VRP_Spreadsheet_Solver_v3.01 – Exemplo Lisboa!

G Erdoğan, 2017
An open source Spreadsheet Solver for VRPs
Comp. & Operations Research, Vol. 84, pp. 62-72

Problemas de Roteamento

Cap. 2 – Problemas de Otimização Combinatória - Roteamento

Problemas de roteamento nos nodos

Problemas de roteamento nos arcos

Utilização de Software – VRP **Spreadsheet Solver**

- ARP
  - Relaxações
  - Heurísticas

Gilbert Laporte
HEC Montréal

Ángel Corberán
Univ. Valencia

Á. Corberán & G. Laporte (2014)
Arc Routing Problems, Methods, and Applications
MOS-SIAM Series on Optimization, Philadelphia

J.R. Evans & E. Minieka (1992)
Optimization Algorithms for Networks and Graphs
2bd edition, Marcel Dekker, Inc. NY

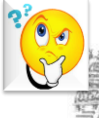
Roteamento nos Arcos – ARP

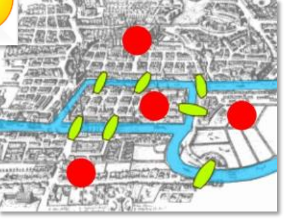
História

- 1º problema – 7 pontes de Königsberg (Kaliningrad)
- Ilha de *Kneiphof* – 2 braços de rio a rodear a ilha – 7 pontes!

Leonard Euler
1707-1783

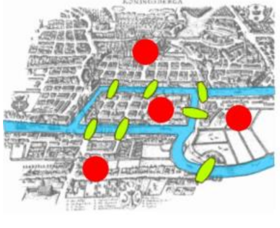
Pergunta – é possível identificar um caminho que passe uma e uma só vez por cada ponte?



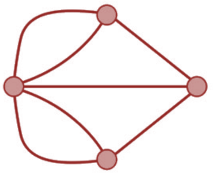


Á. Corberán & G. Laporte (2014)
A Historical Perspective on Arc Routing
in
Arc Routing book, same autors

Roteamento nos Arcos – ARP



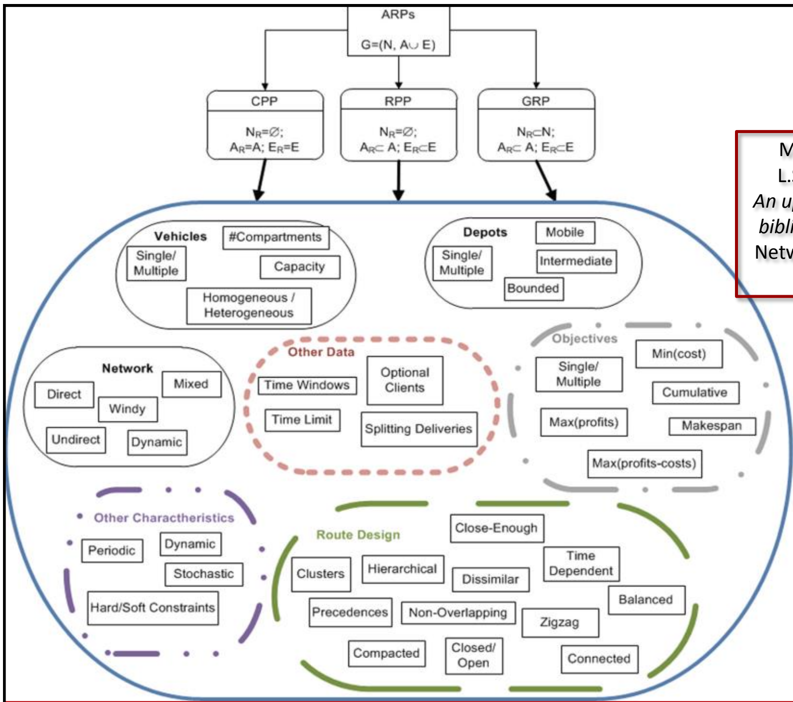
Grafo



7 pontes de Königsberg – Resposta:

- Se existirem + de 2 áreas (2 nodos) com um nº ímpar de pontes (ligações) – Impossível
- Se existirem exatamente 2 áreas com um nº ímpar de pontes – possível se o caminho começar numa dessas áreas e terminar na outra
- Se todas as áreas estiverem ligadas a um nº par de pontes – possível com início e fim em qualquer das áreas

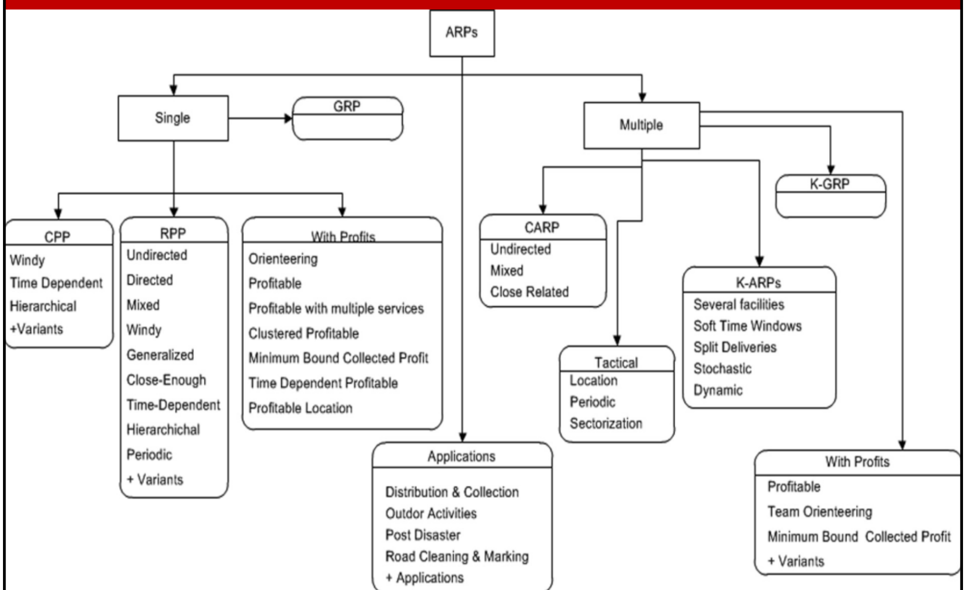
LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA



M.C. Mourão & L.S. Pinto (2017)
An updated annotated bibliography on ARPs
Networks, Volume 70, pp. 144-194

Roteamento nos Arcos – ARP

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA



Roteamento nos Arcos – CPP

Circuito (Ciclo) Euleriano (CE) – Passa uma e uma só vez por cada ligação do grafo

Objetivos:

- Transformar o grafo num grafo Euleriano
- Identificar no grafo Euleriano um CE

Roteamento nos Arcos – CPP

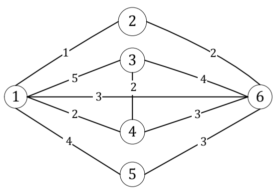
Resolução – CNO:

1. Identificar um *matching* perfeito de custo mínimo entre todos os vértices de grau ímpar do grafo (são em nº par!)
2. Juntar as arestas do matching ao grafo inicial

Carteiro Chinês

Exemplo

Resolva o problema do CPP considerando a rede, onde os valores sobre as ligações representam as respetivas distâncias, e a respetiva matriz de caminhos mais curtos entre qualquer par de vértices.



	1	2	3	4	5	6
1	0	1	4	2	4	3
2	1	0	5	3	5	2
3	4	5	0	2	7	4
4	2	3	2	0	6	3
5	4	5	7	6	0	3
6	3	2	4	3	3	0

Roteamento nos Arcos – CPP

Grafo Simétrico – Grau interno de cada vértice iguala o seu grau externo, ou seja: $\delta^{-}(i) = \delta^{+}(i), \quad \forall i \in V$

Objetivos:

- Transformar o grafo num grafo Euleriano - simétrico
- Identificar no grafo Euleriano um CE

Roteamento nos Arcos – CPP

L. Bodin
Univ. Maryland

Resolução – CO:

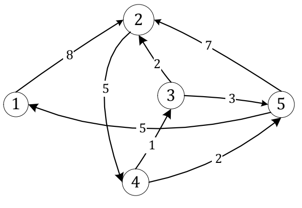
1. Resolver um problema de transporte (PT), considerando:
   i. Origens – vértices com mais arcos a entrar que a sair, com oferta: $\delta^{-}(i) - \delta^{+}(i)$
   ii. Destinos – vértices com mais arcos a sair que a entrar, com procura: $\delta^{+}(i) - \delta^{-}(i)$
   iii. Custo de cada ligação origem, destino são os custos do caminho de menor custo dessa origem para esse destino
2. Juntar os arcos associados à SO do PT (cada arco representa um caminho mais curto entre os respetivos vértices origem, destino) resolvido em 1. ao grafo inicial

E. Beltrami & L. Bodin (1974)
Networks and VR for Municipal Waste Collection
Networks, Volume 4, pp. 65-94

Carteiro Chinês

Exemplo

Resolva o problema do CPP considerando a rede, onde os valores sobre as ligações representam as respetivas distâncias, e a respetiva matriz de caminhos mais curtos entre qualquer par de vértices.



	1	2	3	4	5
1	0	8	14	13	15
2	12	0	6	5	7
3	8	2	0	7	3
4	7	3	1	0	2
5	5	7	13	12	0

LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Cap. 2 Problemas de Otimização Combinatória

SIMO/MQDEE

FIM